Analiza w przestrzeniach L_p
Lista 4

Zad 1. Niech $K \in L_2([0,1] \times [0,1])$. Udowodnić, że operator $T : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ zdefiniowany wzorem $(Tx)(s) = \int_0^1 K(s,t)x(t)dt$ jest operatorem ciągłym.

Zad 2. Niech $D(A) = \{x \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty}(nx(n))^2 < \infty\}$ będzie podprzestrzenią ℓ_2. Czy operator liniowy $A : D(A) \to \ell_2$ zadany wzorem

$$A(x(1), x(2), ...) = (x(1), 2x(2), 3x(3), ...)$$

jest operatorem ciągły?

Zad 3. Wyznacz normę operatora $A : \ell_p \to \ell_p$, $p \in [1, \infty]$, zadanego wzorem

a) $Ax = (x(1), x(2), ..., x(n), 0, 0, ...)$
b) $Ax = (x(1), x(3), x(5), x(7), ...)$
c) $Ax = (x(2), x(3), x(4), ...)$
d) $Ax = (\frac{1}{3}x(1), \frac{1}{3^2}x(2), ..., \frac{1}{3^n}x(n), ...)$
e) $Ax = (2x(1), \frac{9}{4}x(2), ..., (\frac{n+1}{n})^n x(n), ...)$

Zad 4. Niech $A : \mathbb{R}^2 \to R^2$ będzieny dany wzorem $A(x,y) = (\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2})$. Wyznaczyć normę operatora pomiędzy wskazanymi przestrzeniami

a) $A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$
b) $A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$
c) $A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$
d) $A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$
e) $A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$
f) $A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$

Zad 5. Wyznaczyć normę operatora $A : L_p[-1,1] \to L_1[-1,1]$, $p \in [1,\infty)$, gdzie $(Ax)(t) = tx(t)$. Uougólnić to na przypadek, gdy $A : L_{p_2}[-1,1] \to L_{p_1}[-1,1]$, $1 \le p_1 < p_2 < \infty$.

Zad 6. Wyznaczyć normę operatora $A : L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ danego wzorem $(Ax)(t) = \int_0^t x(t)dt$.

Zad 7. Pokazać, że operator $A : X \to Y$ jest ograniczonym operatorem liniowym i obliczyć jego normę.

	X	Y	A
a)	ℓ_3	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)t^k}{2^k}$
b)	$L_2[-1,1]$	ℓ_1	$Ax = \left(\frac{1}{3}\int_{-1}^1 tx(t)dt, ..., \frac{1}{3^k}\int_{-1}^1 t^k x(t)dt, ...\right)$
c)	$L_1[0,1]$	$L_\infty[0,1]$	$Ax(t) = x(t^2)$
d)	ℓ_2	ℓ_∞	$Ax = \left(x(1), \frac{x(2)}{2}, \frac{x(3)}{3}, \frac{x(4)}{4}, ...\right)$

Zad 8. Pokazać, że jeżeli ciąg operatorów $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B(X,Y)$ jest zbieżny w normie do operatora A, to jest do niego zbieżny punktowo, ale odwrotna implikacja na ogół nie zachodzi.

Zad 9. Zbadać, zbieżność ciągu operatorów $A_n : X \to Y$, gdy

	X	Y	A
a)	ℓ_1	ℓ_1	$A_n x = (x(1), x(2), ..., x(n), 0, 0, ...)$
b)	ℓ_2	ℓ_2	$A_n x = \left(\frac{n+1}{n}x(1), \frac{n+1}{n}x(2)..., \frac{n+1}{n}x(n), x(n+1), x(n+2), ...\right)$
c)	ℓ_1	$L_p[0,1]$, $p \ge 1$,	$(A_n x)(t) = x(n)$
d)	$L_2[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t) = (1-t^n)x(t)$

Zad 10. Podać przykład operatora ograniczonego między dwoma przestrzeniami Banacha, którego obraz jest niedomknięty.